I : Dérivées et intégrales

Exercice 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{\cos(x^{1/3}) + \tan\ln(1+x^2)}\,, \quad \operatorname{argsh}\sin x\,, \quad \ln\ln\ln\ln x\,,$$
$$\frac{\cos^3 x - 1}{\ln\sin x + x^3 - 2}\,, \quad x^{\sin x}\,, \quad \int_{\cos x}^{\sin x} f(t,x)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 2

1) Calculer $f(x) - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$, où

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{argch} x & \text{si } x > 1 \\ -\operatorname{argch}(-x) & \text{si } x < -1\,. \end{cases}$$

2) Calculer $f(x) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, où

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{argth} x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \operatorname{argth} \frac{1}{x} & \text{si } |x| > 1\,. \end{cases}$$

Exercice 3 Donner une primitive des fonctions usuelles suivantes :

$$x^\alpha \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}\,, \quad e^x\,, \quad \cos x\,, \quad \sin x\,, \quad \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad \operatorname{ch} x\,, \quad \operatorname{sh} x\,, \quad \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,, \quad \frac{1}{1-x^2}\,.$$

Exercice 4 Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$x^2\sqrt{x^2-1}\,, \quad \frac{1}{\sin x}\,, \quad \frac{1}{\cos x}\,, \quad \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,, \quad \frac{1}{\operatorname{sh} x}\,.$$

Exercice 5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les intégrales de Wallis

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x\,, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x\,.$$

1) Montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
2) En déduire une formule explicite pour I_n (on distinguera les cas n pair et impair).
3) Sans utiliser le résultat de la question précédente, montrer de manière élémentaire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1\,.$$

4) Déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}\,.$$

5) Conclure que

$$I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,.$$

Exercice 6 Soit $F_{n,k}$ la primitive de $\frac{1}{(x^k+1)^n}$ qui s'annule en zéro. Trouver une relation de récurrence reliant $F_{n+1,k}$ et $F_{n,k}$. Appliquer ce résultat au calcul de

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^3}\,.$$

Exercice 7

1) Rappeler la méthode générale permettant de calculer la primitive d'une fraction rationnelle $R(x)$ quelconque.
2) Soit $R(x,y)$ une fraction rationnelle. Montrer que le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ permet de calculer la primitive de $R(\cos x, \sin x)$ si on sait calculer la primitive d'une fraction rationnelle. [Noter que parfois il est possible de simplifier le calcul en posant simplement $t = \cos x$, ou $t = \sin x$, ou $t = \tan x$; ces changements de variable fonctionnent lorsque $R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$ est invariant sous les changements respectifs $x \mapsto -x$, $x \mapsto \pi - x$, $x \mapsto \pi + x$.]

   Montrer qu'une méthode similaire permet de trouver la primitive de $R(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$.
3) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$\frac{1+\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{2}}\,, \quad \frac{1}{(2-\operatorname{ch} x)^2}\,.$$

Exercice 8

1) Calculer une primitive des fonctions suivantes :

$$\frac{x-1}{x+1}\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,, \quad \frac{x^2}{\sqrt{9+4x^2}}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x+\operatorname{th} x+1}}\,.$$

2) Calculer

$$\int_0^1 x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)^{1/3}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^1 \frac{1}{\big(x^3(1-x)\big)^{1/4}}\,\mathrm{d}x\,.$$